Marius BURTEA Georgeta BURTEA Claudia BURTEA

MATEMATICĂ

CULEGERE DE PROBLEME

Clasa a X-a

Trunchi Comun

+

Curriculum Diferenţiat

EDITURA CARMINIS educaţional

CUPRINS

I. MULŢIMI DE NUMERE

I.1. MULŢIMEA NUMERELOR REALE. PUTERI ŞI RADICALI

Noţiuni teoretice

Fie numărul real $a \in [0, +\infty)$.

- $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a, \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$
- Dacă $n = 2k+1, k \geq 1$, atunci $\sqrt[2k+1]{a}$ este definit şi pentru $a < 0$.
- Proprietăţi şi operaţii cu radicali

a) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}, \forall a, b \in [0, \infty)$, n este par

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}, \forall a, b \in \mathbb{R}$, n este impar

b) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \forall a \in [0, \infty), b \in (0, \infty)$, n este par

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$, n este impar

c) Fie $a \in \mathbb{R}$. Atunci $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, \text{ dacă n este par} \\ a, \text{ dacă n este impar} \end{cases}$

d) Dacă $0 \leq a < b$ şi n par, atunci $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi n impar, atunci $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

e) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, \forall a > 0, m \in \mathbb{Z}$, n par

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, \forall a \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}$, n impar

f) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \forall a \geq 0$, $m, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

g) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}, \forall a \geq 0, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, k \in \mathbb{N}^*$

$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}, \forall a \geq 0, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, k \in \mathbb{N}^*$

I.1.1. Radicalul de ordinul n, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

❐ **1.** Să se calculeze:

a) $\sqrt{5^6}$, $\sqrt[4]{2^{14}}$, $\sqrt[6]{(-3)^{24}}$, $\sqrt[7]{7^{14}}$;

b) $\sqrt{361}$, $\sqrt[3]{-27}$; $\sqrt[4]{1296}$, $\sqrt[7]{-128}$;

c) $\sqrt[3]{\frac{-1}{125}}$, $\sqrt[6]{\frac{1}{4096}}$, $\sqrt[11]{(2048)^{-1}}$, $\sqrt[5]{\frac{486}{64}}$;

d) $\sqrt[4]{0{,}0001}$, $\sqrt[3]{0{,}027}$, $\sqrt[5]{-0{,}00243}$.

❐ **2.** Pentru ce valori ale lui $x \in \mathbb{R}$ au loc egalităţile:

a) $\sqrt[4]{x^4} = x$; **b)** $\sqrt[4]{x^4} = -x$; **c)** $\sqrt[5]{x^{10}} = -x$; **d)** $\sqrt[3]{x^3} = x$;

e) $\sqrt[7]{x^7} = -x$; **f)** $\sqrt[5]{(x+1)^5} = -1-x$; **g)** $\sqrt[6]{(2x-1)^6} = 1-2x$; **h)** $\sqrt{\left(\frac{x+3}{x}\right)^2} = \frac{x+3}{|x|}$?

❒ **3.** Să se determine partea întreagă a numerelor:
$\sqrt{2450}$, $\sqrt[3]{69}$, $-\sqrt[3]{200}$, $\sqrt[4]{400}$; $\sqrt[5]{-900}$; $\sqrt[6]{2006}$.

❒ **4.** Să se compare numerele reale:

a) $\left[\sqrt{240}\right]$ şi $\left[\sqrt[3]{2007}\right]$; **b)** $\left[\sqrt[3]{-49}\right]$ şi $\left[-\sqrt[4]{80}\right]$;

c) $\left\{\sqrt{33,64}\right\}$ şi $\left\{-\sqrt[3]{13,824}\right\}$; **d)** $\left\{+\sqrt[3]{-17,576}\right\}$ şi $\left\{-\sqrt[4]{3,8416}\right\}$.

❒ **5.** Să se aproximeze prin lipsă şi prin adaos cu o eroare mai mică decât 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ numerele $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[5]{2}$.

❒ **6.** Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât să fie definite expresiile:

a) $\sqrt{4x-x^2}$; **b)** $\sqrt[4]{6x^2+7x-3}$; **c)** $\sqrt[3]{\dfrac{x}{x^2-4}}$; **d)** $\sqrt[5]{2(x+1)^{-3}}$;

e) $\sqrt[4]{\dfrac{2-x}{5+x}}$; **f)** $\sqrt[6]{\dfrac{-2x^2}{x^2-25}}$; **g)** $\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[4]{16-x^2}$;

h) $\sqrt[4]{\dfrac{(x+4)(3-x)}{|x|}}+\sqrt[5]{\dfrac{1}{2-|x|}}$; **i)** $\sqrt[3]{\dfrac{1}{|x|-3}}+\sqrt[4]{\dfrac{|x+1|}{25-x^2}}$.

❒ **7.** Să se reprezinte grafic funcţia $f: D \to \mathbb{R}$ (D = domeniul maxim de definiţie) ştiind că:

a) $f(x)=(x+1)\sqrt[3]{(1-x)^3}$; **b)** $f(x)=\sqrt[4]{x^4}\cdot\sqrt{(x-2)^2}$;

c) $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^6}-\sqrt[4]{(x+1)^4}$; **d)** $f(x)=\sqrt[4]{\left(x^2-x-2\right)^4}$;

e) $f(x)=-x\sqrt{x^2-4x+4}$.

❒ **8.** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât să existe funcţiile:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{(2-m)x^2-2x-2+3m}$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[4]{m(m+2)x^2-(2+m)x+1}$.

❒ **9.** Pentru ce valori ale parametrului m există funcţiile:

a) $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[2004]{(2m-1)x^2+4mx+2m+1}$;

b) $f:(-\infty,0]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[2006]{(m-3)x^2-2(2m-5)x+m-3}$?

❒ **10.** Pentru ce valori ale parametrului m există funcţia:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{\frac{x+2}{(m-5)x^2-4mx+m-2}}?$$

❒ **11.** Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care este definită expresia $\sqrt[3x+1]{\sqrt[11-3x]{\sqrt[5x]{x+2}}}$.

❒ **12.** Dacă $m, n, p \in \mathbb{N}$, să se determine valoarea expresiei:

$$E=\sqrt[1+2m-n^2]{m}+\sqrt[1+2n-p^2]{n}+\sqrt[1+2p-m^2]{p}.$$

13. Să se determine mulţimile:

a) $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\sqrt[3]{\dfrac{7x+16}{x+7}}\in\mathbb{Z}\right\}$; b) $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x=\sqrt[4]{\dfrac{16-3n}{4}},\ n\in\mathbb{N}\right\}\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$;

c) $C=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\sqrt[3]{\dfrac{6x+18}{2x+1}}\in\mathbb{Z}\right\}$.

I.1.2. Proprietăţi ale radicalilor. Operaţii

1. Să se calculeze:

a) $\sqrt{256\cdot3^4}$; b) $\sqrt[3]{64\cdot9^6}$; c) $\sqrt[4]{162\cdot128}$; d) $\sqrt[5]{3^{10}\cdot2^{-5}}$;

e) $\sqrt[10]{243^4\cdot27^6\cdot3^2}$; f) $\sqrt[4]{\dfrac{7}{5^3}\cdot\dfrac{343}{3125}}$; g) $\left(\sqrt[3]{4}\right)^6$; h) $\left(\sqrt[4]{\left(\dfrac{1}{3}\right)^6}\right)^2$;

i) $\sqrt[3]{196\sqrt{196}}$; j) $\sqrt{\sqrt{4096x^{18}y^{30}}}$.

2. Să se introducă factorii sub radical:

a) $2\sqrt{6}$; $3\sqrt[3]{2}$; $-3\sqrt{5}$; $-4\sqrt[3]{3}$; b) $2\sqrt[3]{\dfrac{1}{16}}$; $-\dfrac{2}{3}\sqrt[4]{\dfrac{27}{8}}$; $\dfrac{3}{5}\sqrt[5]{\dfrac{375}{27}}$; $-\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{\dfrac{216}{64}}$;

c) $x\sqrt{3xy^3}$; $2xy\sqrt[4]{5x^2y}$; $ay\sqrt[3]{ay^2}$; $-b\sqrt[5]{b^2}$; $a^3\sqrt[4]{2}$.

3. Să se scoată factorii de sub radical:

a) $\sqrt{2^5}$, $\sqrt[3]{3^7}$; $\sqrt[4]{4^5\cdot3^6}$; $\sqrt[5]{100^2\cdot4^3}$;

b) $\sqrt{(-2)^4}$; $\sqrt[3]{(-3)^7}$; $\sqrt[4]{(-5)^8}$; $\sqrt[4]{(-2)^5\cdot(-3)^7}$; $\sqrt[5]{27\sqrt{243}}$;

c) $\sqrt{2a^3y^4}$; $\sqrt[4]{3a^8b^5}$; $\sqrt[4]{a^{12}y^6}$; $\sqrt{8x^6y^5}$; $\sqrt[3]{\sqrt{(-2)^6x^8y^9}}$.

4. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care au loc egalităţile:

a) $\sqrt[6]{(x+2)^2}=\sqrt[3]{x+2}$; b) $\sqrt[9]{(x-1)^3}=\sqrt[3]{(x-1)}$.

5. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care au loc egalităţile:

a) $x\sqrt{x^4+1}=\sqrt{x^2\left(x^4+1\right)}$; b) $x\sqrt[3]{x+2}=\sqrt[3]{x^4+2x^3}$;

c) $\sqrt[4]{(x-1)^5}=(x-1)\sqrt[4]{x-1}$; d) $\sqrt[6]{x^8+x^6}=-x\sqrt[6]{1+x^2}$;

e) $\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt[4]{2x^4+3x^6}=(x+1)\sqrt{x+1}+x\sqrt[4]{2+3x^2}$.

6. Să se efectueze:

A. a) $\sqrt{12}-3\sqrt{3}+\sqrt{192}-\sqrt{75}$;

b) $\sqrt[3]{192}-\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{648}+\sqrt[3]{375}$;

c) $\sqrt[4]{\dfrac{81}{2}}-\sqrt[4]{128}+\sqrt[4]{\dfrac{625}{2}}-\sqrt[4]{8}$.

B. **a)** $\left(\frac{6}{5}\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{15}+15\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$;

b) $\left(\sqrt[8]{16}-\sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{324}-\sqrt[4]{64}\right)\left(\sqrt{12-\sqrt{108}}-5\right)$;

c) $\sqrt[3]{\sqrt{16}}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{128}}\cdot\sqrt{2\sqrt{8}}$;

d) $\sqrt[2]{3\sqrt[5]{3}}\cdot\sqrt[10]{9\sqrt[4]{3^5\cdot 27}}$.

C. **a)** $\dfrac{\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{3^4\cdot 2^3}}{\sqrt{72}}$; **b)** $\dfrac{\sqrt[3]{5^2\cdot 2}\cdot\sqrt[6]{25\cdot 2^4}}{\left(\sqrt[4]{100}\right)^2}$;

c) $\left(\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}\right)\left[\left(\sqrt[6]{\dfrac{\sqrt{x^2y^3}}{y\sqrt[6]{x^3}\cdot\sqrt{y}}}\right)^2+\dfrac{\sqrt[12]{y^2x^{15}}}{\sqrt[4]{x^5}}\right]$.

❐ **7.** Să se verifice egalitățile:

a) $\sqrt[8]{2\sqrt{32}}\cdot\sqrt[3]{8\sqrt[4]{4}}\cdot\sqrt[6]{2\sqrt[4]{2^5}}\cdot\sqrt[8]{\sqrt[6]{2}}=2^2$; **b)** $\sqrt[3]{x^2}\cdot\left(\sqrt[3]{x\sqrt{x}}\right)^2\cdot\sqrt{x\sqrt[3]{x^2}}:\left(\sqrt[5]{x\sqrt[4]{x}}\right)^6=x$.

❐ **8.** Să se raţionalizeze numitorii:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$; **b)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$; **c)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$; **d)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$; **e)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}$; **f)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}$;

g) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{72}+4}$; **h)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}}$; **i)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{4}}$; **j)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{2}+1}$.

❐ **9.** Să se raţionalizeze expresiile:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; **b)** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}+\sqrt{8}+\sqrt{6}+\sqrt{2}}$; **c)** $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3-\sqrt{2}}}$;

d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt{2}}$; **e)** $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}}$; **f)** $\dfrac{3}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$; **g)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$.

❐ **10.** Să se ordoneze crescător numerele a, b, c, dacă:

a) $a=\sqrt[4]{8}$, $b=\sqrt[3]{5}$, $c=\sqrt[6]{26}$; **b)** $a=\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}$, $b=\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}$, $c=\sqrt[3]{6}+1$.

❐ **11.** Să se calculeze:

a) $\sqrt{26+6\sqrt{13-4\sqrt{8+2\sqrt{6-\sqrt{20}}}}}+\sqrt{26-6\sqrt{13+4\sqrt{8-2\sqrt{6+2\sqrt{5}}}}}$;

b) $S_1=1+\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}$;

c) $S_2=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}$;

d) $S_3=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}+\sqrt[3]{k(k+1)}+\sqrt[3]{(k+1)^2}}$;

e) $S_4=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[4]{(k-1)^3}+\sqrt[4]{(k-1)^2k}+\sqrt[4]{(k-1)k^2}+\sqrt[4]{k^3}}$.

❒ **12.** Să se verifice valoarea de adevăr a afirmaţiilor:

a) $\sqrt{13-30\sqrt{2-\sqrt{9-4\sqrt{2}}}}+\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}\in\mathbb{Q}$;

b) $\sqrt[3]{9+\frac{10}{3}\sqrt{\frac{71}{3}}}+\sqrt[3]{9-\frac{10}{3}\sqrt{\frac{71}{3}}}=1$;

c) Valoarea expresiei $E(x)=x^3-3x-2\sqrt{2}$ pentru $x=\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}+\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$ este număr iraţional.

d) Dacă $F(x)=x^3-3x-2\sqrt{3}$, atunci $F\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)=0$.

❒ **13.** Să se verifice dacă:

a) $\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}+\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}$ este soluţie a ecuaţiei $x^3-3x-8=0$.

b) $\sqrt[3]{5+\sqrt{17}}+\sqrt[3]{5-\sqrt{17}}$ este soluţie a ecuaţiei $x^3-6x-10=0$.

c) $\sqrt[3]{2}$ este soluţie a ecuaţiei $\sqrt[3]{x+\frac{x+1}{3}\sqrt{\frac{8x-1}{3}}}+\sqrt[3]{x-\frac{x+1}{3}\sqrt{\frac{8x-1}{3}}}-1=0$.

❒ **14.** Să se aducă la o formă mai simplă expresiile:

a) $\left(\frac{\sqrt[3]{a+b}}{\sqrt[3]{a-b}}+\frac{\sqrt[3]{a-b}}{\sqrt[3]{a+b}}-2\right):\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a+b}}-\frac{1}{\sqrt[3]{a-b}}\right)$, $a\neq\pm b,\ b\neq 0$;

b) $\frac{\sqrt[3]{a^2}-4}{\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a}}\left(\sqrt[3]{a}+\frac{2\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}-2}\right)$;

c) $\frac{\left(\sqrt[3]{(a^2+9)\sqrt{1+\frac{9}{a^2}}}-\sqrt[3]{(a^2-9)\sqrt{1-\frac{9}{a^2}}}\right)^2}{a^2-\sqrt{a^4-81}}$, $a\in(3,+\infty)$;

d) $\left[\frac{1}{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)^2}+\frac{1}{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)^2}\right]:\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$.

❒ **15.** Fie $a,b\in\mathbb{Q}$ şi $a,b\geq 0$. Să se demonstreze că:

a) dacă $\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$ şi $\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$;

b) dacă $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\in\mathbb{Q}$, atunci $\sqrt[3]{a}\in\mathbb{Q}$ şi $\sqrt[3]{b}\in\mathbb{Q}$.

❐ **16.** Fie şirul (x_n), $x_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\dots+\sqrt{n}}}}$.

a) Să se calculeze termenii x_1, x_2, x_3 şi să se compare cu 2.

b) Să se demonstreze că $x_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

❐ **17.** Se consideră şirul (x_n), $x_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}$, unde numărul radicalilor este $n \geq 1$ şi şirul (y_n), $y_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2+\sqrt{2+2}}}}$

a) Să se calculeze $y_1, y_2, y_3, y_{10}, y_n$.

b) Să se arate că $x_n < y_n, \forall n \geq 1$.

c) Să se arate că $x_n < \frac{1}{4}(x_{n-1}+6), \forall n \geq 2$.

❐ **18.** Fie $a, b \in (0, \infty)$. Să se arate că:

a) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leq \sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$; **b)** $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b} \leq \sqrt{2(a+b)}+\sqrt[3]{4(a+b)}$.

❐ **19. a)** Fie $x \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $x+\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$. Să se arate că $x^n+\frac{1}{x^n} \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Să se arate că $a = \sqrt[n]{\sqrt{5}+2}+\sqrt[n]{\sqrt{5}-2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

❐ **20.** Să se arate că numerele $a, b \in \mathbb{Q}$, unde:

$a = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$; $\quad b = \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$.

❐ **21.** Să se arate că expresia $E(a) = \sqrt[3]{3a+1+(a+3)\sqrt{a}}+\sqrt[3]{3a+1-(a+3)\sqrt{a}}$, $a \geq 0$ este independentă de a.

❐ **22.** Se consideră şirul (a_n), $a_1 = \sqrt[5]{2006}$, $a_n = \sqrt[5]{2006+a_{n-1}}$, $n \geq 2$.

a) Să se calculeze $[a_1], [a_2]$. **b)** Să se calculeze $[a_n], n \in \mathbb{N}^*$.

❐ **23.** Fie şirul (x_n), $x_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\dots+\sqrt[3]{6}}}$ (se consideră n radicali, $n \in \mathbb{N}^*$).

a) Să se calculeze $[x_n]$. **b)** Să se arate că $\{x_n\} > \frac{1}{5}$.

❐ **24.** Să se calculeze $[y_n]$, unde $y_n = \sqrt{6+\sqrt{6+\dots+\sqrt{6}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\dots+\sqrt[3]{6}}}$ (numărul radicalilor este n).

TESTE DE EVALUARE

Testul nr. 1 *(timp de lucru 40 de minute)*

❍ **1.** Valorile lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care este definită expresia:
$\sqrt{\sqrt[3]{\dfrac{x^2-16}{|x|-5}}}$ sunt elementele mulţimii:

a) $(-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$; **b)** $[-5, -4) \cup (-4, 5]$;
c) $(-\infty, -5) \cup [-4, 4] \cup (5, +\infty)$; **d)** $\mathbb{R}$. *(3 p.)*

❍ **2.** Forma simplificată a expresiei:

$$\left(\sqrt[3]{x\sqrt{x}}+1\right)^2 + 4(x+1) + \left(\frac{\sqrt[6]{y^2x}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}} + \sqrt[6]{x}\right)^3$$ este:

a) $5\left(\sqrt{x}+1\right)^2$; **b)** $\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^2$; **c)** $x\sqrt[3]{y^2}$; **d)** $10\left(\sqrt{x}+1\right)^2$. *(2 p.)*

❍ **3.** Rezultatul calculului $\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{1+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[6]{7+3\sqrt{5}}$ este: **a)** 1; **b)** 2; **c)** 0; **d)** 4. *(2 p.)*

❍ **4.** Se dă numărul $x = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$.
Atunci:
a) $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; **b)** $x = -3$; **c)** $x \in \mathbb{N}$; **d)** $x = 5$. *(2 p.)*

Testul nr. 2 *(timp de lucru 40 de minute)*

❍ **1.** Fie $A = \left\{ m \in \mathbb{R} \,\middle|\, \text{există } f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[2006]{(m+2)x^2 - 2mx + m + 1}} \right\}$.
Atunci:

a) $A = \mathbb{R}$; **b)** $A = (-\infty, -2)$; **c)** $A = (-\infty, -2]$; **d)** $\left(-\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$. *(3 p.)*

❍ **2.** Să se verifice dacă numărul $a = \sqrt[3]{7+\sqrt{11}} + \sqrt[3]{7-\sqrt{11}}$ este soluţie a ecuaţiei
$x^9 - 42x^6 - 438x^3 - 2744 = 0$. *(2 p.)*

❍ **3.** Se consideră numărul:

$$A = \frac{\sqrt{\sqrt[4]{27}+\sqrt{\sqrt{3}-1}} - \sqrt{\sqrt[4]{27}-\sqrt{\sqrt{3}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{27}-\sqrt{2\sqrt{3}+1}}}.$$

Atunci: **a)** $A^2 = 2$; **b)** $A = 1$; **c)** $A = \sqrt{3}$; **d)** $A^2 > 3$. *(2 p.)*

❍ **4.** Să se arate că expresia:

$$E(a, b) = \left(\frac{a-2b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{4b^2}} + \frac{\sqrt[3]{2a^2b}+\sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{4b^2}+\sqrt[3]{16ab}}\right) : \frac{a\sqrt[3]{a}+b\sqrt[3]{2b}+a\sqrt[3]{2b}+b\sqrt[3]{a}}{a+b}$$

nu depinde de a şi b. *(2 p.)*

I.1.3. Puteri cu exponent raţional. Puteri cu exponent real

Noţiuni teoretice

• Puterea cu exponent raţional pozitiv r a numărului $a \ge 0$ este numărul real $a^r = \sqrt[n]{a^m}$, unde $\frac{m}{n}$ este un reprezentant al numărului raţional r.

• Dacă $a > 0, a^{-r} = \frac{1}{a^r}, r \in \mathbb{Q}_+^*$.

• Proprietăţi ale puterilor cu exponent raţional

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$ şi $r, s \in \mathbb{Q}$. Atunci:

a) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$; b) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$; c) $\left(a^r\right)^s = a^{rs}$;

d) $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$; e) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

f) Dacă $a > 1$, atunci $a^r < a^s \Leftrightarrow r < s$.

Dacă $0 < a < 1$, atunci $a^r < a^s \Leftrightarrow r > s$.

g) Dacă $a > 1$, atunci $\begin{cases} a^r > 1, \text{ pentru } r > 0 \\ a^r < 1, \text{ pentru } r < 0 \end{cases}$. h) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Dacă $0 < a < 1$, atunci $\begin{cases} a^r > 1, \text{ pentru } r < 0 \\ a^r < 1, \text{ pentru } r > 0 \end{cases}$.

❒ **1.** Să se scrie ca putere cu exponent raţional:

a) $\sqrt{8}$; **b)** $\sqrt[4]{2^3}$; **c)** $\sqrt{8\sqrt{8}}$; **d)** $\frac{1}{5}\sqrt[3]{5^{-2}2^4}$; **e)** $\frac{1}{27\sqrt[3]{729}} \cdot \left(\frac{1}{9\sqrt[4]{243}}\right)^8$;

f) $\sqrt{125} \cdot \sqrt[3]{0,25} \cdot \sqrt[5]{0,625}$; **g)** $\frac{\sqrt[4]{25}}{\sqrt[12]{4^{19}}} \cdot \frac{5}{2}$; **h)** $\sqrt[6]{0,216^{-1}}$.

❒ **2.** Să se scrie cu ajutorul radicalilor următoarele puteri cu exponent raţional:

a) $4^{\frac{1}{2}}$; **b)** $3^{\frac{3}{2}}$; **c)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$; **d)** $\left(\frac{16}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}$; **e)** $\left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{1}{3}}$; **f)** $(0,0016)^{\frac{3}{4}}$; **g)** $(0,25)^{1\frac{1}{2}}$;

h) $\left(\frac{1}{0,0036}\right)^{0,75}$; **i)** $\pi^{\frac{5}{2}}$.

❒ **3.** Să se efectueze:

a) $3^{\frac{3}{2}} \cdot 27^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{4}{5}} \cdot 9^{-0,4}$; **b)** $256^{-\frac{3}{4}} \cdot 64^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{0,25}\right)^5$;

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{6}} \cdot 25^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{2}{250}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^6$; **d)** $\left(2^3\right)^{\frac{4}{3}} \cdot 4^2 \cdot (8)^{-0,8(3)} \cdot 2^{-\frac{3}{2}}$.

❐ **4.** Să se efectueze:

a) $\left(\sqrt[4]{0{,}0256^{\sqrt{3}}}\right)^{3\sqrt{3}} : \left(\sqrt[6]{8}\right)^{16} \cdot \left(\dfrac{1}{125}\right)^{-3}$; **b)** $\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{27}}\right)^{4} \cdot \left(27^2\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}} : 9^{\frac{\sqrt{27}}{2}} \cdot 81$;

c) $\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}} - \left(\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\sqrt{2}-\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$; **d)** $(0{,}2)^{12} \cdot 25^{\frac{\sqrt{3}}{2}} : 5^{\sqrt{27}} \cdot 625^3$;

e) $\left(\dfrac{(0,(6))^{\sqrt{2}+\sqrt{6}}}{0,(6)^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}} : \left(\dfrac{(0,(6))^{\sqrt{3}}}{(0,(6))^{\sqrt{3}-2}}\right)^{\sqrt{3}+2} \cdot \dfrac{16}{3^2}$.

❐ **5.** Să se aducă la formă mai simplă:

a) $\left(a^{-\frac{1}{6}} \cdot a^{\frac{1}{4}}\right)^3 : \left(a^{\frac{7}{3}} \cdot a^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(a^{0,8(3)}\right)^{\frac{1}{5}}$; **b)** $\left(b^{\frac{3}{4}} \cdot b^{1\frac{7}{8}}\right)^{\frac{1}{2}} : \left[\left(b^{\frac{3}{2}} \cdot b^{0{,}625}\right)^{1\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{8}}\right]$;

c) $\dfrac{\left(a^{\frac{2}{5}}\right)^{20} \cdot \left(a^{-1}b^{1,(6)}\right)^{\frac{3}{2}}}{a^{2{,}5} \cdot \left(b^{22}\right)^{\frac{1}{8}}} \cdot \left(\dfrac{a^{-\frac{1}{5}}}{b^{\frac{1}{20}}}\right)^{15}$; **d)** $\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(x^{\frac{7}{2}} - x^3 + x^{\frac{5}{2}} - x^2 + x^{\frac{3}{2}} - x + x^{\frac{1}{2}} - 1\right)$;

e) $\left(a^2 - a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}} - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}} + 2b^{\frac{3}{4}}\right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)$.

❐ **6.** Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $\left[\dfrac{(0{,}2)^{\sqrt{3}+\sqrt{6}}}{(0{,}2)^{\sqrt{3}}}\right]^{\sqrt{2}} : \left[\dfrac{(0{,}2)^{\sqrt{3}}}{(0{,}2)^{\sqrt{2}-1}}\right]^{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{5^{\sqrt{3}}}$;

b) $\left[\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}}{\left(1+\sqrt{2}\right)^{\sqrt{5}}}\right]^{\sqrt{3}+\sqrt{5}} \cdot \left[\dfrac{\left(1-\sqrt{2}\right)^{\sqrt{7}+5}}{\left(1-\sqrt{2}\right)^{\sqrt{7}+3}}\right]^{-1} = (-1)^{-1}$;

c) $(0{,}125)^{-\frac{1}{3}} + 256^{0{,}75} - \left(\dfrac{1}{5^{\sqrt{2}}}\right)^{-\sqrt{2}} - \left(\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)^{\sqrt{0}} = \sqrt{\sqrt{2^8 \cdot 5^4}}$;

d) $\left[\left(3^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \left(8^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right]^2 : \left[6 + \left(1 - 2\sqrt[4]{3}\right)\left(1 + 48^{0{,}25}\right)\right] = 1$.

❐ **7.** Se consideră expresia $E(x) = \dfrac{2b\sqrt{x^2-1}}{x - \sqrt{x^2-1}}$.

Să se determine valoarea expresiei pentru $x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}} + \sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$, $a > 0$, $b > 0$.

❒ **8.** Se consideră expresia $E(x, y)=\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{y+1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{y+1}}$.

Să se determine valoarea expresiei dacă $x=\dfrac{2a^2-2a+3}{a^2+2}$, $y=\dfrac{-4a+2}{a^2+2}$, $a \in \mathbb{R}$.

❒ **9.** Se consideră expresia $E(x,y)=\dfrac{x^2\sqrt{x}}{\sqrt[4]{y\sqrt[3]{y^{-2}}}}\cdot\dfrac{x^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[4]{y^3}}{\left(\sqrt{x^3y^5}\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(\dfrac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{-\frac{11}{2}}}\right)^{\frac{1}{6}}$.

Să se calculeze $E\left(\sqrt[4]{6}, 3\right)$.

❒ **10.** Se consideră expresia $E(x,y)=\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y}+\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y}\right)\cdot\dfrac{\left(x^3y\right)^{\frac{1}{2}}}{x+y}+\dfrac{2y}{y-x}$.

Să se arate că $E\left(2006^{\frac{1}{2}},2005^{\frac{1}{3}}\right)=2$.

❒ **11.** Să se arate că expresia $E(x,y)=\left[\dfrac{1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^{-2}}-\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}\right]\cdot\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$ este independentă de x şi de y.

❒ **12.** Să se restrângă expresiile:

a) $\left\{\left(\sqrt[8]{x^6}-\sqrt[8]{y^6}\right)\left[\left(x^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\left(y^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}-(xy)^{\frac{1}{2}}\right\}\cdot\dfrac{2\sqrt{4,5}}{3\sqrt{2}(x+y)}$;

b) $\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1+\sqrt[8]{a}\right)\cdots\left(1+\sqrt[2^n]{a}\right)\left(1-\sqrt[2^n]{a}\right)$, $a \geq 0$.

❒ **13.** Care dintre următoarele numere este mai mare:

a) $4^{\frac{3}{4}}$ sau $4^{\frac{7}{8}}$; **b)** $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{10}$ sau $(0,8)^{\frac{21}{2}}$; **c)** $(0,7)^{\frac{2}{3}}$ sau $\left(\dfrac{7}{10}\right)^{\frac{24}{36}}$; **d)** $(1,2)^9$ sau $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{8,9}$;

e) $\left(\sqrt{6}\right)^{-6}$ sau $\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^{0,6}$; **f)** $\sqrt{\left(\dfrac{1}{8}\right)^{\frac{11}{2}}}$ sau $\sqrt[5]{(0,125)^{14}}$; **g)** $(0,5)^{\frac{7}{3}}$ sau $\sqrt{\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^9}}$;

h) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ sau $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{11}}$; **i)** $\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{5}+2}$ sau $\left(\sqrt{5}\right)^{4,2}$?

Testul nr. 1

(timp de lucru 40 de minute)

❍ **1.** Scrieţi ca putere cu exponent raţional numerele $\sqrt[5]{2\sqrt[3]{4\sqrt[7]{128}}}$ şi $\sqrt[7]{3\sqrt[5]{9\sqrt[3]{27}}}$. *(3 p.)*

❍ **2.** Fie $E(a,b)=\dfrac{\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^2+\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)^2}{a+\sqrt{ab}}\cdot\dfrac{1}{a^{-1}}$.

Atunci $E\left(25,\sqrt[5]{2}\right)$ este:

a) $\sqrt[5]{2}$; **b)** 10; **c)** 50; **d)** $2\sqrt[5]{2}$. *(3 p.)*

❍ **3.** Este $\sqrt[3]{5+\sqrt{10}}+\sqrt[3]{5-\sqrt{10}}$ soluţie a ecuaţiei $x^9-30x^6-105x^3-1000=0$? *(3 p.)*

Testul nr. 2

(timp de lucru 50 de minute)

❍ **1.** Rezultatul calculului $\left[\dfrac{\left(-4^{16}\right)^4\cdot 100^{24}\cdot(-27)^{16}}{2048^{16}\cdot(-15)^{49}}\right]^{\frac{(-2)^7\cdot 3^6}{36^3}}$ este:

a) -15; **b)** 15^2; **c)** $\dfrac{1}{15^2}$; **d)** 15^3. *(3 p.)*

❍ **2.** Se consideră expresia $E(x)=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{(1-x)^{-2}}+\dfrac{2^{\frac{3}{2}}}{x^{-1}}\right):\left(\dfrac{x^{-4}}{1-x^{-4}}\right)^{-1}$.

Atunci: **a)** $E\left(\sqrt[4]{2}\right)<2\sqrt{3}$; **b)** $E\left(\sqrt[4]{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; **c)** $E\left(\sqrt[4]{2}\right)>2\sqrt{3}$; **d)** $E\left(\sqrt[4]{2}\right)=1$. *(3 p.)*

❍ **3.** Demonstraţi formula radicalilor compuşi:

$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\dfrac{A+C}{2}}\pm\sqrt{\dfrac{A-C}{2}}$, unde $C^2=A^2-B$, pentru $A\geq 0, B\geq 0, A^2-B\geq 0$.

(3 p.)

I.1.4. Logaritmul unui număr pozitiv

Noțiuni teoretice

• Fie $a > 0, a \neq 1$ şi $x > 0$

Logaritmul în baza a al numărului pozitiv x este exponentul la care trebuie ridicată baza a pentru a obţine pe x:

$\log_a x = b \Leftrightarrow a^b = x \Leftrightarrow a^{\log_a x} = x$

• Proprietăţi. Operaţii cu logaritmi

Fie $a, b > 0, a, b \neq 1$ şi $x, y \in (0, \infty)$.

a) $\log_a a^n = n; \log_a a = 1; \log_a 1 = 0;$

b) $\log_a x + \log_a y = \log_a (xy);$

c) $\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y};$

d) $\log_a x^k = k \cdot \log_a x;$

e) $\log_a \sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{n} \log_a x;$

f) $\log_{a^k} x = \dfrac{1}{k} \cdot \log_a x;\quad \log_a x = \dfrac{1}{\log_x a};$

g) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ (formula de schimbare a bazei logaritmului).

• Logaritmul cu baza $a = 10$ se numeşte **logaritm zecimal (lg x)**, iar logaritmul cu baza $a = e \approx 2{,}7$ se numeşte **logaritm natural (ln x)**.

❐ **1.** Să se scrie sub formă logaritmică următoarele egalităţi:

a) $3^4 = 81;$ **b)** $4^4 = 256;$ **c)** $5^x = 200;$ **d)** $\left(3\sqrt{3}\right)^x = \dfrac{1}{3}.$

❐ **2.** Să se scrie sub formă exponenţială următoarele egalităţi:

a) $\log_2 16 = 4;$ **b)** $\lg 0{,}0001 = -4;$ **c)** $\log_{\sqrt{2}} 8 = 6;$

d) $\log_4 64 = x;$ **e)** $\log_3 x = 5;$ **f)** $\log_5 \sqrt{\sqrt[3]{25}} = \dfrac{1}{3}.$

❐ **3.** Să se stabilească valoarea de adevăr a afirmaţiilor:

a) $3^x = 5 \Leftrightarrow \log_3 5 = x;$ **b)** $4^x = 10 \Leftrightarrow x = \log_4 10;$

c) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[5]{256} = -\dfrac{8}{5};$ **d)** $\log_{10} \dfrac{1}{10 \cdot \sqrt{0{,}001}} = \dfrac{1}{2};$

e) $\log_8 \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \dfrac{24}{7};$ **f)** $\log_2 \left[\log_3 \left(\log_7 (343)\right)\right] = 0.$

❐ **4.** Să se determine valorile reale ale lui x pentru care sunt definiţi logaritmii:

a) $\log_3 (4 - x);$ **b)** $\log_{\frac{1}{2}} \left(x^2 + 1\right);$ **c)** $\log_{0,1} \left(-x^2 + x + 2\right);$

d) $\ln\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right);$ **e)** $\log_{\frac{3}{4}} \left[\log_{\frac{7}{6}} (x - 1)\right];$ **f)** $\log_{x+1} 15;$

g) $\log_x\left(x-\frac{1}{2}\right)$; h) $\log_{x^2+1}\left(\frac{1}{4}-x^2\right)$; i) $\log_4\frac{2x-1}{x+3}$;

j) $\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_5(x-2)\right]$; k) $\ln\left[\log_{\frac{1}{e}}\left(x^2-8\right)\right]$; l) $\log_{0,1}\left[\log_{\pi}\left(x^2-9x-9\right)\right]$;

m) $\log_{x+2}\left(9-x^2\right)$; n) $\log_{x-4}\left(x^2-49\right)$; o) $\log_{5+x}\left(6-x-x^2\right)$;

p) $\log_{25-x^2}\left(\sqrt{x+2}-1\right)$; q) $\log_{\frac{x-1}{x+1}}\frac{x^2+9}{4x^2-3x-1}$; r) $\log_5\sqrt{\frac{64-x^2}{x^2-7x+10}}$.

❒ **5.** Să se calculeze:

a) $\log_5 15625$; b) $\log_3\frac{1}{2187}$; c) $\log_{64}\sqrt[5]{\frac{1}{2}}$;

d) $\log_{5\sqrt[3]{5}}\frac{1}{25}$; e) $\log_4\left[\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{512}\right)\right]$; f) $\log_{\frac{2}{3}}\left(\log_5 3^{\log_3\sqrt[3]{25}}\right)$;

g) $\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_{\sqrt{6}}\left(\log_3 729\right)\right]$; h) $\log_{\frac{49}{4}}\left(\log_4 6^{\log_6 128}\right)$; i) $\log_{\sqrt{2}-1}\left(\sqrt{3}+1\right)+\log_{\sqrt{2}+1}\left(\sqrt{3}+1\right)$.

❒ **6.** Folosind regulile de calcul cu logaritmi, să se scrie sub formă simplă expresiile:

a) $\log_3 5+\log_3 16,2$; b) $\log_{12} 288-\log_{12} 2$;

c) $\log_7 35+\log_7 9-\log_7 45$; d) $\frac{\log_{\sqrt[5]{2}} 81}{\log_{16} 3\sqrt[3]{3}}$;

e) $3^{1-\log_3 10}-4^{1-\log_4 5}+6^{\log_6 9-1}$; f) $\log_2\sqrt{2}+6\log_4\sqrt[6]{2+\sqrt{2}}+\frac{5}{2}\log_2\sqrt[5]{2-\sqrt{2}}$;

g) $\log_{13}\sqrt[3]{169}+\log_{13}\sqrt{4+\sqrt{3}}+\log_{13}\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{3}}}+\log_{13}\sqrt{3-\sqrt{5+\sqrt{3}}}$;

h) $\log_2 3\cdot\log_3 16$; i) $\log_{\sqrt{3}} 4\cdot\log_{2\sqrt{2}}\sqrt[4]{243}$.

❒ **7.** Dacă $\lg 4\approx 0,60206$ şi $\lg 6\approx 0,77815$, să se calculeze:

a) $\lg 24$; b) $\lg 0,(6)$; c) $\lg 80$; d) $\lg 2\sqrt[3]{12}$;

e) $\lg 16\sqrt[4]{32}+\lg 72$; f) $\log_4 6$; g) $\log_{16} 12\sqrt[3]{96}$.

❒ **8.** Să se exprime în funcţie de a:

a) $\log_{100} 20$, dacă $a=\log_2 5$; b) $\log_{15} 75$, dacă $a=\log_3 45$;

c) $\log_{45} 75$, dacă $a=\log_{15} 405$; d) $\log_{28} 98$, dacă $a=\log_{112} 56$;

e) $\log_{44} 242$, dacă $a=\log_{176} 484$; f) $\log_{\sqrt{6}-\sqrt{3}}\frac{1}{1+\sqrt{2}}$, dacă $a=\log_{3-2\sqrt{2}}\sqrt{3}$;

g) $\log_{\operatorname{tg} x}\frac{\sin 2x}{2}$, dacă $a=\log_{\sin x}\cos x$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\setminus\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$.